

総合報告

16.8

バイスペクトルの測定とその応用

上野 敏行*・館 暉**・山田 一郎***・藤村貞夫****

* 千葉大学工学部機械工学科 千葉市弥生町 1-33

** 工業技術院機械技術研究所 東京都杉並区井草 4-12-1

*** 東京大学宇宙航空研究所計測部 東京都目黒区駒場 4-6-1

**** 電気通信大学電気通信学部電波通信学科 調布市調布ヶ丘 1-5-1

(1975年10月29日 受理)

Measurement of Bispectrum and Its Applications

Toshiyuki UENO*, Susumu TACHI**, Ichiro YAMADA***
and Sadao FUJIMURA***** Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, the University of Chiba,
1, Yayoi-cho, Chiba** Mechanical Engineering Laboratory, Agency of Industrial Science and Technology, 4-12-1,
Igusa, Suginami-ku, Tokyo*** Institute of Space and Aeronautical Science, the University of Tokyo, 1 Komaba,
Meguro-ku, Tokyo**** Department of Radio and Operation, Faculty of Electro-Communications, the University of
Electro-Communications, 1-5-1, Chofuga-oka, Chofu-shi, Tokyo

(Received October 29, 1975)

In this paper are discussed the whole aspects of the bispectrum of stationary time series: its definition, estimation, and application to signal processing.

The bispectrum is defined as the two dimensional Fourier transform of the third order correlation function, and gives a description of the interrelation between the three frequency components at frequencies whose sum is equal to zero.

The bispectrum $\Phi(f_1, f_2)$ can also be obtained as an averaged product of the outputs of three band-pass filters, with center frequencies f_1 , f_2 , and $f_1 + f_2$, respectively. A simple procedure of derivation of the variance and other quantities necessary for designing an estimation procedure of a bispectrum is obtained through this physical interpretation.

Applications of the bispectrum analysis to such problems as the analysis of EEG (electroencephalogram), extraction of periodic signals submerged in noise, analysis of roughness of surface, and system identification are discussed and some examples are given. The examples show that the bispectrum can be very useful in many practical applications.

1. ま え が き

時系列信号を解析するさい、パワースペクトルや相関関数を求めることがよく行なわれるが、ここでは、パワースペクトルより1次次数の高いバイスペクトルについて、その意味や種々の問題への応用を考察する。

ガウス性不規則信号の場合にはパワースペクトルが有力な解析手段であることはよく知られているが、非ガウス性信号の統計的性質の記述や、非線形系の特性解析のためには、より高次のスペクトルが必要であり、ここで考察するバイスペクトルはパワースペクトルに対して、解析の範囲を次数の高い方へ一段階拡張したものになっ

ているのである。現在の計算機の能力からすれば、さらに高次のスペクトルも求められようが、計算時間、記憶容量、結果の表示などの点でバイスペクトルより高次のものを求め、それを実際問題に適用することは困難である。

このように、バイスペクトルは比較的簡単に求めることができ、しかも、従来はほとんどそれに頼っていた、パワースペクトルだけでは得られない情報を得ることができるという点に、その特徴があるといえよう。

ところで、バイスペクトルの研究には理論的側面と実際(応用)的側面とがある。

前者は、定義や計算アルゴリズムから導かれる種々の性質を考察の対象とするもので、これまでには、Brillinger, Rosenblatt, Van Ness らによる理論的(数学的)研究がある¹⁻⁵⁾。

彼らは、バイスペクトルや n 次スペクトルの推定値の統計的性質について述べており、推定値が漸近的に不偏推定量や一致推定量となるための条件を示し、推定値の分散を求めたり、推定値が漸近的にガウス分布をすることなどを明らかにしている。

さらに、Huber ら⁶⁾は、デジタル計算機によるバイスペクトルの実際的計算法に即して、分散や有意性検定のための計算式を与えている。

しかし、従来の論文では、バイスペクトル測定の物理的意味が必ずしも明確ではなかった。本報告では、定義式に対応づけられる実際的測定系を提案し、測定の物理的意味を明確にしている。こうすることにより、実際の測定における、推定値の誤差の評価や、測定系のパラメータ(デジタル計算機による計算の場合にはサンプル数など計算パラメータ)の決定が見通しよく容易に行なえることになるのである。

いっぽう、実際的側面に関しては、Hasselmann ら⁷⁾の浅海波解析への応用をはじめいくつかの例が報告されているが、本報告でも新しい分野への適用を提案する。

2. バイスペクトル (Bispectrum)

2.1 定義

定常不規則でエルゴード性を満足する平均値 0 の信号 $x(t), y(t)$ を考える。

$$E[x] = 0, E[y] = 0 \quad (2.1)$$

ここで、 $E[\]$ は期待値を表わす。

この不規則信号について、3 次の自己相関関数 $\phi_{xxx}(\tau_1, \tau_2)$ 、相互相関関数 $\phi_{xxy}(\tau_1, \tau_2)$ がつぎのように定義される*。

$$\phi_{xxx}(\tau_1, \tau_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)dt \quad (2.2)$$

$$\phi_{xxy}(\tau_1, \tau_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau_1)y(t+\tau_2)dt \quad (2.3)**$$

さらに、バイスペクトル密度 $\Phi_{xxx}(f_1, f_2)$ 、クロスバイスペクトル密度 $\Phi_{xxy}(f_1, f_2)$ がこれらの 2 次元フーリエ変換としてつぎのように定義される*。

$$\Phi_{xxx}(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xxx}(\tau_1, \tau_2) \times e^{-j2\pi(f_1\tau_1 + f_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.4)$$

$$\Phi_{xxy}(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xxy}(\tau_1, \tau_2) \times e^{-j2\pi(f_1\tau_1 + f_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.5)**$$

上で定義された相関関数とバイスペクトルの次元は、信号の次元を〔ボルト〕とすると、それぞれ、〔ボルト〕³、〔ボルト〕³・〔時間〕² となり、いずれも〔ボルト〕³ に比例することから 3 次の量ということができる。

2.2 バイスペクトルの物理的意味と性質

いま、 $x(t)$ を T 時間だけ観測して得た信号を $x_T(t)$ と表わす。このとき

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.7)$$

ここで、 $x_T(t)$ を用いて求めた 3 次相関関数 $\phi^T_{xxx}(\tau_1, \tau_2)$ とそのフーリエ変換 $\Phi^T_{xxx}(f_1, f_2)$ を考える。これらは、それぞれ、つぎのように表わされる。

$$\phi^T_{xxx}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{T} \int_0^T x_T(t)x_T(t+\tau_1)x_T(t+\tau_2)dt \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \Phi^T_{xxx}(f_1, f_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^T_{xxx}(\tau_1, \tau_2) \times e^{-j2\pi(f_1\tau_1 + f_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{1}{T} X_T(-f_1 - f_2) X_T(f_1) X_T(f_2) \\ &= \frac{1}{T} X_T^*(f_1 + f_2) X_T(f_1) X_T(f_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

ここで、* は複素共役を表わし、

$$X_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (2.10)$$

定義式(2.2)から

$$\phi_{xxx}(\tau_1, \tau_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \phi^T_{xxx}(\tau_1, \tau_2) \quad (2.11)$$

であり、いっぽう、バイスペクトルは

* これらはいずれも存在するものとして話を進める。一般の n 次の場合については付録を参照されたい。

** これらは x, y の組み合わせにより全部で 6 種類存在するが、簡単のため ϕ_{xxy}, Φ_{xxy} で代表させる。

$$\Phi_{xxx}(f_1, f_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} E\{\Phi^T_{xxx}(f_1, f_2)\} \quad (2.12)^*$$

なお、実際の測定では、(2.12)の期待値は、ウィンドウ (Spectral Window) を用いた移動平均や、集合平均によって求められる。ここで、バイスペクトルは一般には複素量であることを注意しておこう。

バイスペクトルを求めるには、定義式(2.12), (2.9)から、Fig. 1のように、中心周波数がそれぞれ、 $f_1 + f_2$, f_1, f_2 の3つのバンドパスフィルタの出力を掛け合わせて平均をとればよいことが推察され、後述するように、その正当性が確かめられる。

このようにして得られるバイスペクトルは、各バンドパスフィルタの出力 (平均値は0) が互いに独立であれば、積の平均は平均値の積となることから、値が0となる。値が0でないのは3つの出力がすべて関連しているときで、したがって、バイスペクトルは、周波数 $f_1, f_2, -(f_1 + f_2)$ の3つの成分の従属性を示す量と見なすことができる。不規則であって、バイスペクトルが0でない信号は、不規則ななかにも各周波数成分間に従属性があり、そのために波形に「くせ」が現れるものと考えられる。ただし、上に述べたように、バイスペクトル $\Phi_{xxx}(f_1, f_2)$ は、おもてに現れている周波数 f_1, f_2 とおもてに現れてない周波数 $-(f_1 + f_2)$ の3つの周波数成分間の関係を示すだけであり、一般の3つの周波数 f_1, f_2, f_3 (≠ $f_1 + f_2$) の成分間については何も知ることができないことに注意する必要がある。

ここで、Fig. 1 に示した系によりバイスペクトルの

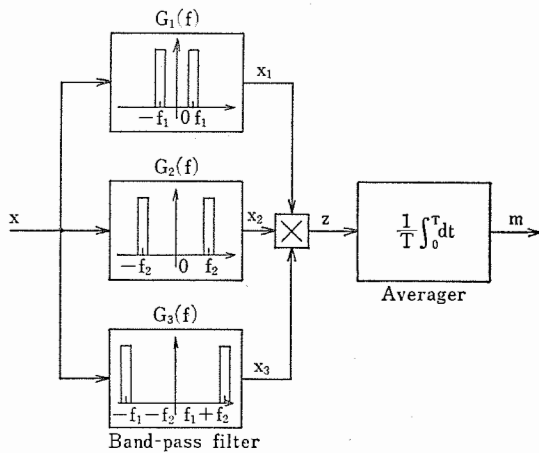


Fig. 1 バイスペクトル測定系.

* クロスバイスペクトルは、

$$\Phi_{xxy}(f_1, f_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{T} X_T^*(f_1 + f_2) X_T(f_1) \times Y_T(f_2)\right] \quad (2.12')$$

ここで、 $Y_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y_T(t) e^{-j2\pi f t} dt$

測定が行なえることを確かめておこう⁸⁾。各フィルタのインパルス応答を、 $g_1(t), g_2(t), g_3(t)$ と表わし、各フィルタの出力 x_1, x_2, x_3 の積を T 時間平均したものを m とすると

$$m = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) x_2(t) x_3(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt \prod_{i=1}^3 \left\{ \int_0^{\infty} g_i(\lambda_i) x(t - \lambda_i) d\lambda_i \right\} \quad (2.13)$$

ここで、 T 時間平均で求めた3次相関関数 $\phi^T_{xxx}(\tau_1, \tau_2)$ を用いれば、 T が十分大きいときには、

$$\phi^T_{xxx}(-\lambda_1 + \lambda_3, -\lambda_2 + \lambda_3) \doteq \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \lambda_1) x(t - \lambda_2) x(t - \lambda_3) dt \quad (2.14)$$

とすることができ、したがって、

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda_1) g_2(\lambda_2) g_3(\lambda_3) \times \phi^T_{xxx}(-\lambda_1 + \lambda_3, -\lambda_2 + \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f_1) G_2(f_2) G_3(-f_1 - f_2) \times \Phi^T_{xxx}(f_1, f_2) df_1 df_2 \quad (2.15)$$

ここで、

$$G_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g_i(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (2.16)$$

いま、各バンドパスフィルタの周波数特性を Fig. 2 (a) I のようにする。つまり、 G_1, G_2 のバンド幅を B , G_3 のバンド幅を $2B$ とすると、 f_1, f_2 についての積分範囲は Fig. 2 (b) I に示す正方形の範囲となる。別の選び方をして Fig. 2 (a) II のように、3つのバンド幅がいずれも B とすれば、 f_1, f_2 についての積分範囲は Fig. 2 (b) II の六角形の範囲となる。Fig. 2 (b) には f_1, f_2 の正の部分のみを示してあるが、実際には原点

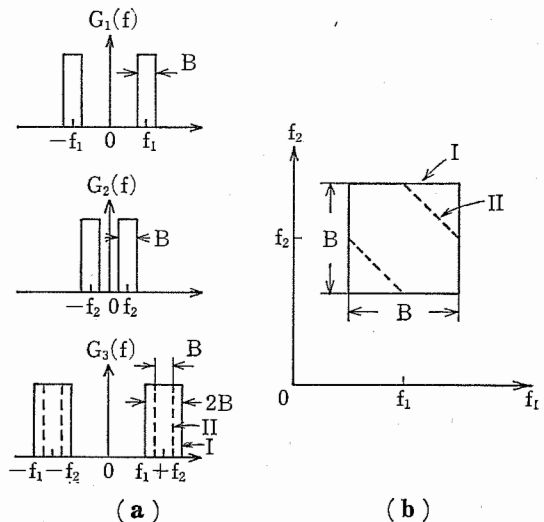


Fig. 2 (a) バイスペクトル測定のためのフィルタの周波数特性. (b) 周波数領域における実効平均化範囲.

に対称な部分にも同じ形の積分範囲が存在している。平均化の及ぶ範囲の面積は Fig. 2(b) I の場合 B^2 (バイスペクトル測定の実効的バンド幅) となり、その範囲内ではバイスペクトルが一定の値 $\Phi_{xxx}(f_1, f_2)$ をとると考えるわけである。このとき、測定系の出力 m_1 はバイスペクトル $\Phi_{xxx}(f_1, f_2)$ の推定値 $\hat{\Phi}_{xxx}(f_1, f_2)$ を与える。

$$m_1 = B^2 \{ G_1(f_1)G_2(f_2)G_3(-f_1-f_2)\hat{\Phi}_{xxx}(f_1, f_2) + G_1(-f_1)G_2(-f_2)G_3(f_1+f_2)\hat{\Phi}_{xxx}(-f_1, -f_2) \} = 2B^2 A_1 A_2 A_3 \text{Re}\{\hat{\Phi}_{xxx}(f_1, f_2)\} \quad (2.17)$$

ただし、各フィルタの通過帯域内では

$$G_i(f) = A_i e^{j\angle G_i(f)}$$

と表わされ、さらに、フィルタ間の位相は

$$\angle G_1(f_1) + \angle G_2(f_2) = \angle G_3(f_1 + f_2) \quad (2.18)$$

を満たすものとする。Re[] は実数部を表わす。

いっぽう、Fig. 2(b) II の場合については、 $3B^2/4$ の範囲について平均化が行なわれることになり、上と同じフィルタの条件のもとで

$$m_{11} = 2 \times \frac{3}{4} B^2 A_1 A_2 A_3 \text{Re}\{\hat{\Phi}_{xxx}(f_1, f_2)\} \quad (2.19)$$

となる。

さらに、各フィルタの位相の間に

$$\angle G_1(f_1) + \angle G_2(f_2) + \pi/2 = \angle G_3(f_1 + f_2) \quad (2.20)$$

なる関係があるときには、 $\hat{\Phi}_{xxx}(f_1, f_2)$ の虚数部が求まる。

なお、クロスバイスペクトルについても同様の議論ができ、Fig. 1 のバンドパスフィルタ $G_2(f)$ に、信号 x の代わりに y を加えれば、(2.12') に対応するクロスバイスペクトルの推定値が得られることがわかる*。

ところで、バイスペクトルを求めるさい、その対称性に注意すると計算量を少なくすることができる。

信号 $x(t)$ が定常であることから、バイスペクトルについては

$$\begin{aligned} \Phi_{xxx}(f_1, f_2) &= \Phi_{xxx}(f_2, f_1) = \Phi_{xxx}(f_1, -f_1 - f_2) \\ &= \Phi_{xxx}(-f_1 - f_2, f_1) \\ &= \Phi_{xxx}(f_2, -f_1 - f_2) \\ &= \Phi_{xxx}(-f_1 - f_2, f_2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

が成立する。これは、Fig. 1 の測定系について、3つのバンドパスフィルタの順序を入れかえても得られる結果が変わらないことに対応している。(2.21)と

$$\Phi_{xxx}(f_1, f_2) = \Phi_{xxx}^*(-f_1, -f_2)$$

の関係から、バイスペクトルは (f_1, f_2) 平面の12の三角形領域 (Fig. 3) のいずれか1つに対して計算すればよいことがわかる。なお、これらの三角形はすべて面積が等しい。

* Fig. 1 の測定系で信号 y を加えるフィルタを変えれば6通りのクロスバイスペクトルが得られる。

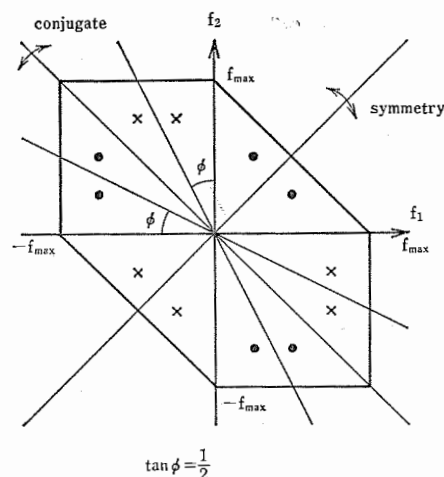


Fig. 3 バイスペクトルの対称性 (f_{max} : 信号に含まれる最高周波数)。

3. バイスペクトルのデジタル計算機による推定法

バイスペクトルを計算する手順を以下に簡単にまとめておく。

1) 信号 $x(t)$ を Δt 間隔で N 個読み取る。 $N=2^n$ とするとよい。 N 個のデータ列を K 組用意する。

$${}^k x_i = x(i\Delta t) \quad i=0, 1, 2, \dots, N-1, \quad k=1, 2, \dots, K \quad (3.1)$$

2) 必要に応じて、各データ列から、それぞれの平均値を差し引く、不必要な周波数成分を除く、信号を切り出したさいの端の効果を減らせるためのテーパをかける、などの前処理を行なう。

3) FFT (高速フーリエ変換) を利用し、離散型フーリエ変換を行ない、 X_q を求める。

$${}^k X_q = {}^k X(q\Delta f) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} {}^k x_i e^{-j2\pi(q/N)i} \quad (3.2)$$

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}, \quad 0 \leq q \leq \frac{N}{2} \quad (3.3)$$

4) (f_1, f_2) 点におけるバイスペクトルを求めるには、バイスペクトルが一定とみなせる範囲で、つぎのようなウィンドウつきの平均化をすればよい。

$$\begin{aligned} {}^k \hat{\Phi}_{xxx}(q_1 \Delta f, q_2 \Delta f) &= \sum_{l_1} \sum_{l_2} w(l_1, l_2) \\ &\times \frac{1}{T} {}^k X_{q_1+l_1} {}^k X_{q_2+l_2} \\ &\times {}^k X_{q_1+q_2+l_1+l_2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

ただし

$$q_1, q_2 = 0, M, 2M, \dots < \frac{N}{2}, \quad q_1 + q_2 < \frac{N}{2}$$

$$M = 2L + 1 \quad (L \text{ は } 0 \text{ から自然数})$$

$$\sum_{l_1} \sum_{l_2} w(l_1, l_2) = 1, \quad X_{-l} = X_l^*, \quad X_{N/2+l} = X_{N/2-l}^*$$

ウィンドウ $w(l_1, l_2)$ としては, つぎの2種類が考えられる.

$$I) \quad w(l_1, l_2) = \begin{cases} \frac{1}{M^2} & |l_1| \leq L, |l_2| \leq L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$II) \quad w(l_1, l_2) = \begin{cases} \frac{4}{3M^2+1} & |l_1| \leq L, |l_2| \leq L, \\ & |l_1+l_2| \leq L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.6)$$

これを用いる平均化は, Fig. 4 に示すように, f_1, f_2 について Δf ごとに求まる, $X_{q_1} X_{q_2} X_{q_1+q_2}^*/T$ に, それぞれ I または II で示される等しい重みをつけたものになっている. このような平均化と, バイスpekトルを求めるための3つのバンドパスフィルタのバンド幅の関係は, Fig. 2 に示した通りである.

5) 最後に, K 組のデータについて平均する.

$$\hat{\Phi}_{xxx}(q_1 \Delta f, q_2 \Delta f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{\Phi}_{xxx}^k(q_1 \Delta f, q_2 \Delta f) \quad (3.7)$$

この場合, (3.4), (3.7)の平均化は, 必要に応じて片方だけ ($K=1$ または $M=1$) にしてもよい.

6) パワースpekトルは, 上と同じ M, q を用いて, つぎのように計算できる.

$${}^k \hat{\Phi}_{xx}(q \Delta f) = \frac{1}{M} \sum_{M_i=-L}^L \frac{1}{T} |{}^k X_{q+i}|^2 \quad (3.8)$$

4. 3次相関器とバイスpekトル分析器

4.1 ヘテロダイン法によるバイスpekトル分析器⁹⁾

これは Fig. 5 のブロック線図に示すように, 信号 $x(t)$ に, それぞれ, f_1, f_2, f_1+f_2 なる周波数の正弦波を掛けたものを作り, インパルス応答 $g_i(t)$ のローパスフィルタに通し, その出力を掛け合わせて平均してバイスpekトルを求める方法である. こうして得られる Φ'_{xxx} は, $f_3=f_1+f_2, \phi_3=\phi_1+\phi_2$ の関係があり, $x(t)$

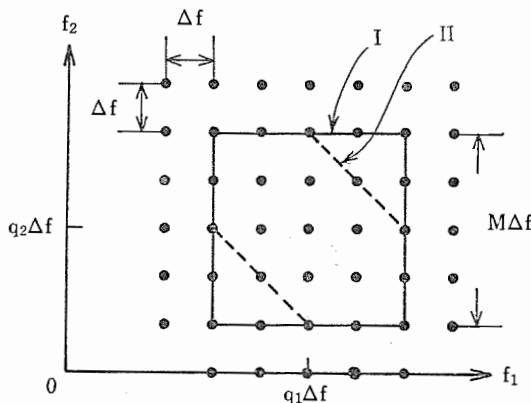


Fig. 4 周波数領域における平均化範囲.

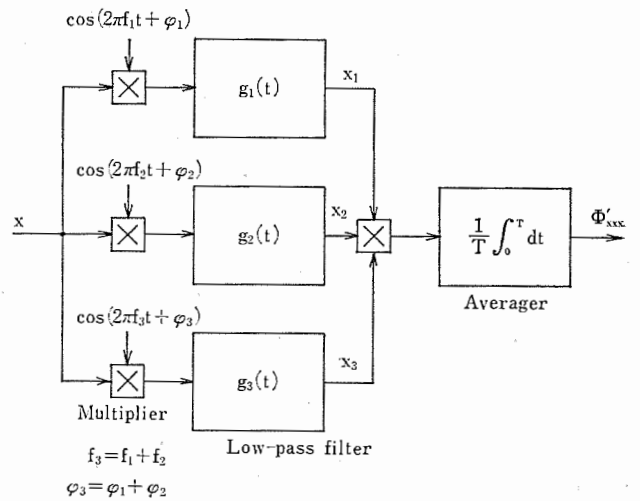


Fig. 5 バイスpekトル分析器のブロック図.

が不規則信号で正弦波とは独立であるから, 十分大きな平均時間 T については, 近似的に(4.1)となる.

$$\begin{aligned} \Phi'_{xxx} &= \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t)x_2(t)x_3(t)dt \\ &\doteq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 g_1(\lambda_1)g_2(\lambda_2)g_3(\lambda_3) \\ &\quad \times \frac{1}{T} \int_0^T dt x(t-\lambda_1)x(t-\lambda_2)x(t-\lambda_3) \\ &\quad \times \cos\{2\pi f_1(\lambda_3-\lambda_1)+2\pi f_2(\lambda_3-\lambda_2)\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで, $\tau_1=\lambda_3-\lambda_1, \tau_2=\lambda_3-\lambda_2$ とおき,

$$w(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^\infty g_1(\lambda_3-\tau_1)g_2(\lambda_3-\tau_2)g_3(\lambda_3)d\lambda_3 \quad (4.2)$$

とすると, (2.8)の $\phi^T_{xxx}(\tau_1, \tau_2)$ を使って, (4.1)は,

$$\begin{aligned} \Phi'_{xxx} &\doteq \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi^T_{xxx}(\tau_1, \tau_2)w(\tau_1, \tau_2) \\ &\quad \times \cos\{2\pi(f_1\tau_1+f_2\tau_2)\}d\tau_1d\tau_2 \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty d\beta_1d\beta_2 G_1(\beta_1)G_2(\beta_2)G_3^*(\beta_1+\beta_2) \\ &\quad \times \{\Phi^T_{xxx}(f_1+\beta_1, f_2+\beta_2) \\ &\quad + \Phi^{T*}_{xxx}(f_1+\beta_1, f_2+\beta_2)\} / 2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる.

ここで, フィルタ $G_i(f)$ として周波数0の近傍のみを通すローパスフィルタを用いれば, 通過帯域においては位相の遅れが少なく, 近似的に(2.18)の関係が成立する. したがって, (4.3)はバイスpekトルの実数部の推定値を与えるものとなる. Fig. 5 のブロック線図で $\cos(2\pi f_3 t + \phi_3)$ の代わりに, $\sin(2\pi f_3 t + \phi_3)$ を用いれば, 同様にして, バイスpekトルの虚数部の推定値が求まることになる. 測定例を Fig. 6 に示す.

4.2 光学的3次相関器¹⁰⁾

Fig. 7 のような光学系で, フィルムの透過率として表わされる1次元信号の3次相関関数を求めることがで

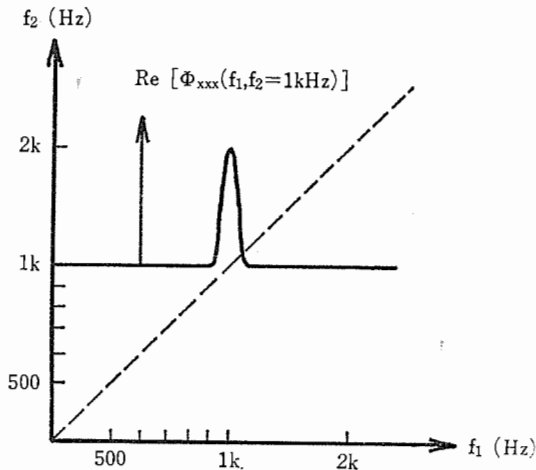


Fig. 6 Fig. 5 の分析器で測定されたバイスペクトル $x(t) = a \sin 2\pi f_0 t - b \cos 4\pi f_0 t$ ($f_0 = 1\text{kHz}$).

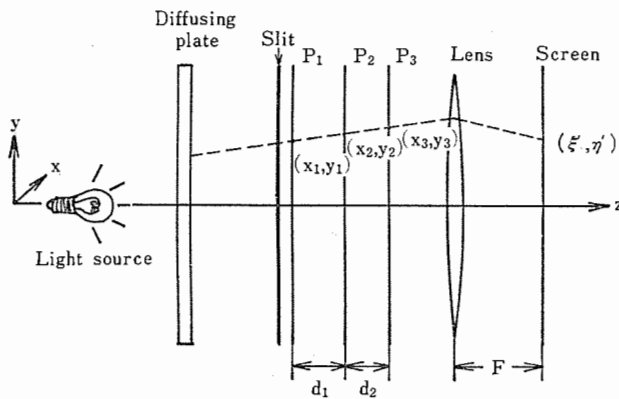


Fig. 7 光学的 3 次相関器.

きる。いま、図のプレート P_k 上の点 (x_k, y_k) の透過率 $p(x_k, y_k)$ と、信号 $f(\cdot)$ にはつぎのような関係があるものとする。

$$p_k(x_k, y_k) = f(a_k x_k + b_k y_k) \quad (4.4)$$

透過率 $g(x_1, y_1)$ のスリットを P_1 の直前に置いたとき、スクリーン上の点 (ξ', η') での光の強度は、

$$\begin{aligned} I(\xi', \eta') &= I_0 \iint g(x_1, y_1) \prod_{k=1}^3 p_k(x_k, y_k) dx_1 dy_1 \\ &= I_0 \iint g(x_1, y_1) \prod_{k=1}^3 f(a_k x_k + b_k y_k) dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

ただし、 $(x_k, y_k), (\xi', \eta')$ の間にはつぎの関係がある。

$$\frac{x_2 - x_1}{d_1} = \frac{x_3 - x_2}{d_2} = \frac{\xi'}{F}, \quad \frac{y_2 - y_1}{d_1} = \frac{y_3 - y_2}{d_2} = \frac{\eta'}{F} \quad (4.6)$$

ここで、理想的スリットを考え、

$$g(x_1, y_1) = \delta(y_1) \quad (4.7)$$

とする。また、 P_2, P_3 はそれぞれ $-45^\circ, 45^\circ$ 傾け、密着させる。 P_1 は 45° または、 -45° 傾ける。このとき、 a_k, b_k, d_2 はつぎの値を持つことになる。

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad d_2 = 0$$

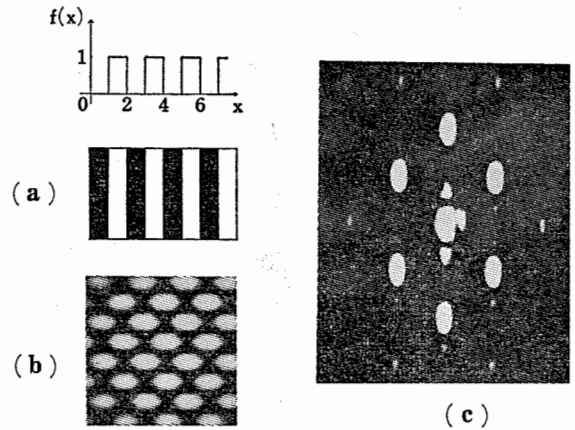


Fig. 8 (a) 矩形波, (b) Fig. 7 の相関器で測定された 3 次相関関数の絶対値の 2 乗, (c) バイスペクトルの絶対値の 2 乗.

$$(4.8)$$

さらに、 $x_1' = x_1/\sqrt{2}$ とし、 τ_1, τ_2 としてつぎのような変数をとる。

$$\tau_1 = \frac{\xi' - \eta'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d_1}{F}, \quad \tau_2 = \frac{\xi' + \eta'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d_1}{F} \quad (4.9)$$

(4.6) から (4.9) の関係式を用いると、(4.5) は (4.10) のように表わすことができ、3 次相関関数 $I(\tau_1, \tau_2)$ がスクリーン上に求まる。Fig. 8 に例を示す。

$$I(\tau_1, \tau_2) = \sqrt{2} I_0 \int f(x_1') f(x_1' + \tau_1) f(x_1' + \tau_2) dx_1' \quad (4.10)$$

3 次相関関数をフィルム上に記録し、コヒーレント光を用いた簡単な光学系で、2 次元フーリエ変換を行ない、バイスペクトルの絶対値の 2 乗が求まることになる。

なお、このほかに乱数電圧法による 3 次相関器¹¹⁾や、超音波回折格子を用いた光学的 3 次相関器¹²⁾が報告されている。

5. バイスペクトル推定値の誤差

デジタル計算機を用いてバイスペクトルを求める場合に、量子化レベルや、サンプリング周期を極端にしなければ、推定値にあまり大きな影響を及ぼさない (エイリアシングについては文献 5))。したがって、推定値の誤差のおもな原因は、データが有限長であることによる統計的なばらつきである。

バイスペクトル推定値の分散 σ^2 はつぎのように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\{\hat{\phi}(q_1 \Delta f, q_2 \Delta f) \hat{\phi}^*(q_1 \Delta f, q_2 \Delta f)\} \\ &\quad - |E\{\hat{\phi}(q_1 \Delta f, q_2 \Delta f)\}|^2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

いま、信号がガウス性で、バイスペクトルは 0 とし (付録 II 参照)、(3.4) により推定値を求める場合には、

$$\sigma^2 = E\left\{ \sum_{l_1} \sum_{l_2} \sum_{l_1'} \sum_{l_2'} w(l_1, l_2) w(l_1', l_2') \right\}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{T^2} X_{q_1+l_1} X_{q_2+l_2} X_{q_1+q_2+l_1+l_2}^* X_{q_1+l_1}' \\ & \times X_{q_2+l_2}' X_{q_1+q_2+l_1+l_2}' \end{aligned} \quad (5.2)$$

となる。\$q_1 \approx q_2\$ とし、\$w(l_1, l_2)\$ による平均化の及ぶ範囲は \$(q_1 \Delta f, q_2 \Delta f)\$ のごく近傍に限ることにする。さらに、\$T\$ が十分大きいときには、

$$E\left[\frac{1}{T} X(q \Delta f) X(q' \Delta f)\right] = \begin{cases} \Phi_{xx}(q \Delta f) & q+q'=0 \\ 0 & q+q' \neq 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

となること¹³⁾、\$X_q\$ のガウス性からその6次モーメントが2次モーメントの積和で表わされること¹⁴⁾とを考慮すると、(5.2)は(5.4)のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & \sum_{l_1} \sum_{l_2} w^2(l_1, l_2) T \Phi_{xx}\{(q_1+l_1)\Delta f\} \\ & \times \Phi_{xx}\{(q_2+l_2)\Delta f\} \Phi_{xx}\{(q_1+q_2+l_1+l_2)\Delta f\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

\$l_1, l_2\$ の平均化の及ぶ範囲でパワースペクトルは一定であるとみなせば、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & \left\{ \sum_{l_1} \sum_{l_2} w^2(l_1, l_2) \right\} N \Delta t \Phi_{xx}(q_1 \Delta f) \\ & \times \Phi_{xx}(q_2 \Delta f) \Phi_{xx}\{(q_1+q_2)\Delta f\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

(3.7)によって求めたバイスペクトル推定値の分散は、(3.5)、(3.6)に示した I, II のウィンドウのいずれを用いるかに応じて、つぎのようになる。

$$\sigma_I^2 = \frac{N \Delta t}{K M^2} \Phi_{xx}(q_1 \Delta f) \Phi_{xx}(q_2 \Delta f) \Phi_{xx}\{(q_1+q_2)\Delta f\} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{II}^2 = & \frac{4N \Delta t}{K(3M^2+1)} \Phi_{xx}(q_1 \Delta f) \Phi_{xx}(q_2 \Delta f) \\ & \times \Phi_{xx}\{(q_1+q_2)\Delta f\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

さらに、もう少し一般的なウィンドウについて考えることもできて、平均化の及ぶ範囲が等価的に、Fig. 4, I と同じとみなせる場合には、バンド幅 \$B^2\$ の中に約 \$(B/\Delta f)^2 = (TB)^2\$ 個の点が含まれるので、均等な重みをとるとすれば、

$$w(l_1, l_2) = \frac{1}{(TB)^2} \quad (5.8)$$

となる。(5.5)において \$(TB)^2\$ 個の \$w(l_1, l_2)\$ について平均化することにすれば、

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{TB^2} \Phi_{xx}(q_1 \Delta f) \Phi_{xx}(q_2 \Delta f) \Phi_{xx}\{(q_1+q_2)\Delta f\} \quad (5.9)$$

と表わすことができる。

いま、Fig. 1 のブロック線図でバイスペクトルが測定できることに注目すると、以上のようにして求めた分散についての式 (5.9) が正しいことは容易に確かめられる⁸⁾。有限平均時間 \$T\$ で求めた \$m\$ の分散 \$\sigma_m^2\$ は、近似的につぎのように表わされる¹⁵⁾。

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \{\phi_{zz}(\tau) - [E\{z(\tau)\}]^2\} d\tau \quad (5.10)$$

各フィルタの出力 \$x_1, x_2, x_3\$ が互いに独立であると、\$E\{z(\tau)\} = 0, \phi_{zz}(\tau) = \phi_1(\tau)\phi_2(\tau)\phi_3(\tau)\$ となり、(5.10)はつぎのようになる。

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} df \Phi_3(f) \int_{-\infty}^{\infty} df' \Phi_1(f-f') \Phi_2(f') \quad (5.11)$$

ただし、\$\phi_i(\tau), \Phi_i(f)\$ は、それぞれ、\$x_i(t)\$ の自己相関関数とパワースペクトルである。各バンドパスフィルタの通過帯域の中で、\$x\$ のパワースペクトルを一定とみなし、また、(2.17)の関係式を考慮すれば、Fig. 2 のフィルタ I について、バイスペクトル実数部の分散 \$\sigma_{Re}^2\$ は(5.12)で表わせる。

$$\sigma_{Re}^2 = \frac{1}{2TB^2} \Phi_{xx}(f_1) \Phi_{xx}(f_2) \Phi_{xx}(f_1+f_2) \quad (5.12)$$

Fig. 2 のフィルタ II については、(5.12)の \$B^2\$ を \$3B^2/4\$ と置き換えればよい。

(5.11)によれば、\$m\$ の分散は各バンドパスフィルタの位相特性には関係しないことがわかり、したがって、バイスペクトルの実数部と虚数部の分散は等しく、\$\sigma_{Re}^2\$ は \$\sigma_0^2\$ の \$1/2\$ となっている。同様の計算をすることにより \$f_1=f_2\$ の場合には(5.11)を2倍したものが \$\sigma_m^2\$ となることがわかる。

ところで、以上の結果は、観測時間 \$T\$ を十分大きいとして Brillinger ら^{4,6)} が得ている結果とも一致している。Brillinger らは、\$n\$ 次スペクトルの推定値の分散を求めるのに、信号 \$x\$ のガウス性を仮定していないが、\$x\$ が非ガウス性信号であっても、狭帯域フィルタを通った信号はガウス性に近い性質を持つとみなせることを考えれば、上で得た結果と合致するのは当然といえよう。

6. バイスペクトルの応用

応用例のもっとも古いものの1つに Hasselmann ら⁷⁾ による浅海波のバイスペクトル分析がある。海の波の高さのある地点で観測した信号は近似的にガウス性信号と考えられるが、海岸に打ち寄せたり波頭が砕けるときには波形は特徴的な形を持ち、厳密に言ってガウス性信号ではない。このことからバイスペクトルは0でない値を持つわけで、実際、彼らは海底での圧力変動の記録からバイスペクトルを求めており、これが波の伝搬式から理論的に求まるバイスペクトルと一致することを確かめている。また、永田¹⁶⁾ は、海洋の温度の鉛直分布のバイスペクトル分析から、水温が深さとともに急激に低くなる温度躍層間の関連性や構造を明らかにしようとする試みを報告している。

このように構造などを推定する他の例としては、たとえば、電磁波を周期的または不規則に位相あるいは振幅変調する電離層の構造推定がある¹⁷⁾。これは、入射波がガウス性信号であるとき、パイスペクトルを用い変調が非線形なものかどうかを知り、さらに変調がわずかに非線形であるときには電離層の構造に関する情報を得ようとするものである。

上記のような物理現象に関連する信号だけでなく、経済現象の中に隠れた非線形性を調べるため、株式相場や連邦準備銀行内の現金保有高をデータとしたパイスペクトル分析も行なわれている¹⁸⁾。

以上の例とは趣を異にし、また3次相関関数を応用するものとして、3次相関関数が時間原点の取り方によらない(空間信号の場合は x の位置によらない)ことを用いて、文字などから位置によらない特徴抽出を行ないパターン識別に適用する例がある¹⁹⁾。

以下に、筆者らの研究を中心に述べる。

6.1 表面あらさ解析²⁰⁾

Fig. 9 は、旋盤で旋削した鋼の丸棒の表面あらさ曲線(a)を分析した結果の一例である。バイトの送り速度は0.1 mm/rev. である。(c)のパワースペクトルに、送り速度に対応する周波数(波長 $\lambda=0.1$ mm)に大きなピーク、そしてその2倍の周波数($\lambda=0.05$ mm)に小さなピークが認められる。(d)のパイスペクトルは、 $f_1=$

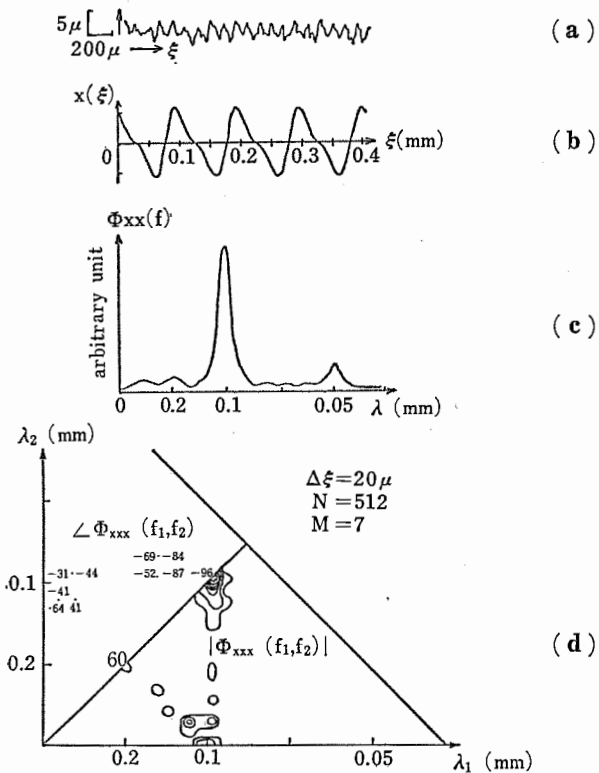


Fig. 9 表面あらさのパイスペクトル解析。(a)表面あらさ曲線、(b)合成波形、(c)パワースペクトル、(d)パイスペクトル。

$f_2=10$ c/mm の点に大きな値のピークを持ち、 $f_1=10$ c/mm の成分と $f_1+f_2=20$ c/mm の成分間の従属性を示している。

ここで、「2つの成分間の従属性」ということをより明らかにするため、2次高調波を含む正弦波信号のモデルを考え、パイスペクトルのもつ意味をさらに詳しく考察してみよう。

表面あらさ曲線に話を限らず、一般に、周波数 $f_0, 2f_0$ の2つの正弦波で構成されるつぎのような信号 $x(t)$ を考えよう。

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_1) + A_2 \cos(4\pi f_0 t - \varphi_2) \tag{6.1}$$

まず、 $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ が定数の場合について x のパイスペクトルを求めると、 $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$ の範囲では

$$\Phi_{xxx}(f_1, f_2) = \frac{A_1^2 A_2}{8} \exp\{-j(2\varphi_1 - \varphi_2)\} \times \delta(f_1 - f_0) \delta(f_2 - f_0) \tag{6.2}$$

となる*。ここで $\varphi_1 = 2\pi f_0 t_1$ とおくと $x(t)$ は、

$$x(t) = A_1 \cos\{2\pi f_0(t - t_1)\} + A_2 \cos\{4\pi f_0(t - t_1) + 2\varphi_1 - \varphi_2\} \tag{6.3}$$

と書かれる。つまりパイスペクトルの $f_1 = f_2 = f_0$ に現れる位相角は、2つの周波数成分間の位相差になる。

つぎに、 A_i, φ_i が確率変数である場合を考える。信号 $x(t)$ から取り出した $x_T(t)$ を周期 $T=1/f_0$ で繰り返した信号 $x_T'(t)$ は、フーリエ級数で表現でき、 f_0 と $2f_0$ の2つの周波数成分を持つ。

$$x_T'(t) = C_1 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_1) + C_2 \cos(4\pi f_0 t - \varphi_2) \tag{6.4}$$

ここで、 $C_i, \varphi_i (i=1, 2)$ は確率変数である。 $x_T'(t)$ の3次相関関数 $\phi^T_{x'x'x'}(\tau_1, \tau_2)$ は、

$$\begin{aligned} \phi^T_{x'x'x'}(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{T} \int_0^T x_T'(t) x_T'(t + \tau_1) x_T'(t + \tau_2) dt \\ &= \frac{C_1^2 C_2}{4} [\cos\{2\pi f_0(\tau_1 + \tau_2) - 2\varphi_1 + \varphi_2\} \\ &\quad + \cos\{2\pi f_0(2\tau_1 - \tau_2) + 2\varphi_1 - \varphi_2\} \\ &\quad + \cos\{2\pi f_0(2\tau_2 - \tau_1) + 2\varphi_1 - \varphi_2\}] \end{aligned} \tag{6.5}$$

さて φ_1, φ_2 が互いに独立で、 $-\pi$ と π の間に一様分布するような過程に対しては、(6.5)の期待値は、

$$E[\phi^T_{x'x'x'}(\tau_1, \tau_2)] = \phi_{xxx}(\tau_1, \tau_2) = 0 \tag{6.6}$$

となりパイスペクトルは0となる。

ところが、 φ_1, φ_2 が独立ではなく、

$$\varphi_2 - 2\varphi_1 = \varphi = \text{const.} \tag{6.7}$$

* 2. では定常不規則信号を扱ってきたが、(6.1)のような周期信号については、ディラックのデルタ関数 $\delta(\cdot)$ を用いて、パワースペクトル、パイスペクトルを定義することができる。

なる関係が保たれている過程に対しては、 φ は定数で一定なので、 $E[C_1^2 C_2]$ について期待値をとれば、バイスペクトルは、 $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$ の範囲で、

$$\Phi_{xxx}(f_1, f_2) = \frac{E[C_1^2 C_2]}{8} \exp[j\varphi] \delta(f_1 - f_0) \times \delta(f_2 - f_0) \quad (6.8)$$

となる。以上から明らかなように、不規則信号において、たとえば周波数 f_0 と $2f_0$ の成分が存在し、その一方が他方から派生したものであるときには、 φ_1 と φ_2 の間には一定の位相関係が存在するためバイスペクトルは0でなくなるわけである。

ここで問題を表面あらさ曲線に戻す。いま表面あらさ曲線のモデルとして(6.1)あるいは(6.4)のように2つの正弦波で合成されるものを考える((6.1)の時間軸 t は ξ に置き換える)。 (6.1)の A_1, A_2 はパワースペクトルの測定値から、位相 ($2\varphi_1 - \varphi_2$) は(6.2)の関係を用いてバイスペクトルの測定値から求め、(6.3)によって合成された波形を Fig. 9(b) に示す。これを(a)の記録と比べてみると波形の特徴が似ていることが認められ、興味深い。

6.2 雑音に埋れた周期信号の分離²¹⁾

人は騒音の中でも必要な話し声や音を選び出して聞くことができ、また、まわりの人の話し声の中でも特定の人の話を聞きとることができる。このカクテルパーティ効果と呼ばれる耳の機能の一部を、バイスペクトル解析を用いて機械系でまねてみるができる。

音源の信号 $s(t)$ は周期的な調和複合音で、雑音 $n_A(t)$ はガウス性とする。ある地点Aで観測された信号 $x(t)$ が(6.9)のように表わせるとする。

$$x(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cos\{2\pi k f_0(t - t' - t_A) - \varphi_k\} + n_A(t) \quad (6.9)$$

ここで $A_k \neq 0$ ($k=1, 2, \dots, n$)、 t_A は遅れ時間、 t' は時間原点とする。 $x(t)$ のパワースペクトル密度は(6.10)となる。

$$\Phi_{xx}(f) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k^2}{4} \delta(f \pm k f_0) + \Phi_{n_A n_A}(f) \quad (6.10)$$

ところで、平均値が0の2つの信号が、互いに独立なとき、両者の和からなる信号のバイスペクトルは、それぞれのバイスペクトルの和で表わされる。ガウス性雑音 n_A のバイスペクトルは、付録IIに示すように0である。そこで、(6.9)の $x(t)$ のバイスペクトルは、調和複合音のバイスペクトルに等しい。2次高調波を含む正弦波信号(6.1)の場合を一般化して、 A_n, φ_n が定数のとき、 $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$ の範囲に限れば、バイスペクトル密度はつぎのようになる。

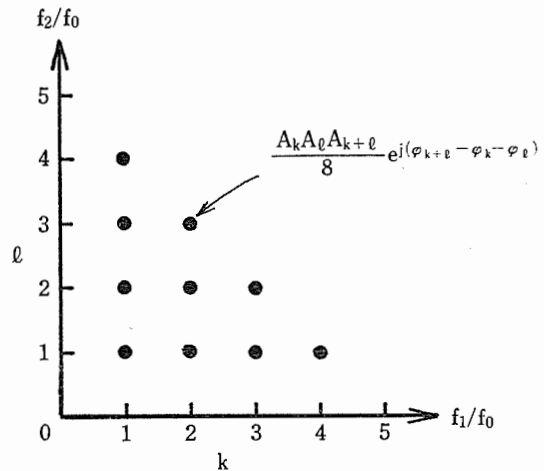


Fig. 10 バイスペクトル。

$$x(t) = \sum_{n=1}^5 A_n \cos[2\pi n f_0(t - t') - \varphi_n], (f_1, f_2 \geq 0)$$

$$\Phi_{xxx}(f_1, f_2) = \sum_k \sum_l \frac{A_k A_l A_{k+l}}{8} \times \exp[j(\varphi_{k+l} - \varphi_k - \varphi_l)] \times \delta(f_1 - k f_0) \delta(f_2 - l f_0) \quad (6.11)$$

Fig. 10 に $n=5$ の場合のバイスペクトルを示す。 A_n, φ_n が確率変数であっても、 $\varphi_{k+l} - \varphi_k - \varphi_l$ が一定に保たれている周波数 ($k f_0, l f_0$) のところで、バイスペクトルが値を持つことが(6.8)を導いたときと同様に示される。

以上の関係から、調和複合音の振幅と位相を推定することが可能になる。まず、 A_1, φ_1 を

$$A_1 = \sqrt{4\Phi_{xx}(f_0)df}, \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \quad (6.12)$$

として、(6.10), (6.11)の関係により、順次 A_k, φ_k を求め信号 $s(t)$ を再生することができる。ただし、 A_k には雑音 n_A による誤差が含まれる。ここで、 $\Phi_{xx}(f_0)df$ は、 f_0 のまわりの微小領域に含まれるパワーの大きさを表わすものとする。

また、複数個の音源がある場合でも各音源の基本周波数と高調波の周波数が互いに異なっていれば、それぞれの音源を分離して再生することも可能である。

つぎに、音源の方向を知るために、左右両耳へ達する音信号の位相差を検出することを考えてみる。いま、B点での観測信号 $y(t)$ が(6.13)のように表わされるとする。

$$y(t) = \sum_{k=1}^n B_k \cos\{2\pi k f_0(t - t' - t_B) - \varphi_k\} + n_B(t) \quad (6.13)$$

(2.5)で定義した x, y のクロスバイスペクトルは、

$$\Phi_{xy}(k f_0, l f_0) = \frac{A_k B_l A_{k+l}}{8} \exp[-j\{\varphi_k + \varphi_l - \varphi_{k+l} - 2\pi l f_0(t_A - t_B)\}] \delta(f_1 - k f_0) \delta(f_2 - l f_0) \quad (6.14)$$

$\Phi_{xy}(k f_0, l f_0)$ と $\Phi_{xx}(k f_0, l f_0)$ の位相項の値の差

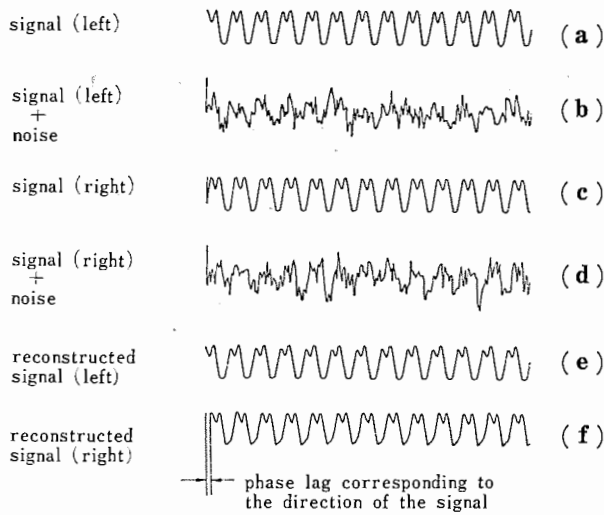


Fig. 11 雑音に埋れた周期波形の再生.

は $2\pi l f_0(t_A - t_B)$ であることから、音源から A, B 2点までの到達時間差がわかる。なお A_k, B_k の強度差を用いれば音源がある程度定位できる。Fig. 11 の (f) は (a) に対して遅れた信号 (c) を (d) の中から検出して再生したものである。

6.3 脳波のバイスペクトル分析

人の頭皮上の電位変動は脳波と呼ばれている。不規則に変動する脳波波形のパターンと、脳の疾患や生理状態 (睡眠中か覚醒時かなど) との対応づけは、経験的なデータの蓄積により行なわれている。これを自動化する種々の試みの 1 つに時系列解析がある。このうちパワースペクトル解析では脳波波形をある程度分類することができるに過ぎないが、バイスペクトル解析を併用すれば、波形のより細かな構造を知ることができる。

覚醒閉眼安静時に後頭部より導出される約 10 Hz の波は α 波と呼ばれている。Fig. 12 (a) にその一例を示す。波形を注意深く観察すると、下に尖っているとか上に尖っているとかのくせを持っていることが認められる。これはスペクトルの 10 Hz 付近の成分 (以下 α 成分と呼ぶ) と 20 Hz 付近の成分 (β 成分) とが互いに独立ではないことを予想させる。

G. Dumermuth ら²²⁾ は、 α 波中にとくに顕著に β_1 成分と β_2 成分がみられる双生児の二例について、双極導出した脳波のバイスペクトルを調べ、 α 成分と β_1, β_2 成分間に固定した位相関係があることを報告している。

館ら²³⁾ は、 α 成分と β 成分の位相関係を成人の正常時と偏頭痛時について調べている。Fig. 12 はある被験者の後頭部の左右の対称部位から単極導出した脳波の波形と、そのバイスペクトルの $f_1 = 11$ Hz での断面図である。(c) は、同一被験者が頭部左側に偏頭痛を感じているときの測定例である。(b) のバイスペクトルの位相項は左右ほぼ同一の値であるが、偏頭痛時には (c) のように、

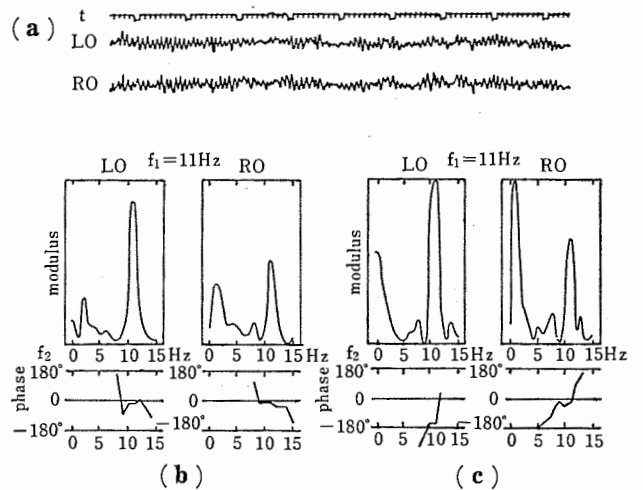


Fig. 12 左右後頭部から導出した脳波のバイスペクトル分析。(a) 波形、(b) バイスペクトルの断面表示 ($f_1 = 11$ Hz)、正常時、(c) 偏頭痛時のバイスペクトル。

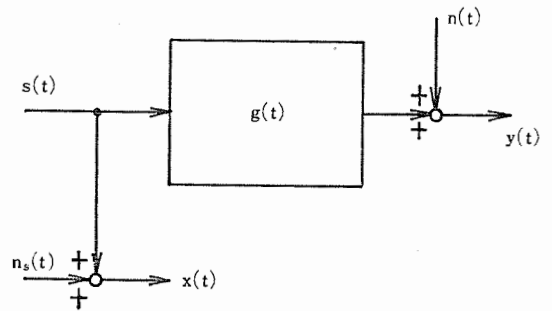


Fig. 13 測定される系のブロック線図。

位相関係が左右で異なっていることがわかる。他の 10 数人の被験者についても、正常時にはバイスペクトルの位相項が左右同じ形であるのが、偏頭痛時には差を生じることが統計的に明らかにしている。

そのほかに、開眼から閉眼への移行により、脳波のスペクトルは変化するが、 α 成分と β 成分の位相関係はある範囲内に保たれていること²⁴⁾、また、光刺激に対する脳波のバイスペクトル解析などについても報告されている²⁵⁾。

6.4 系の動特性の測定

6.4.1 線形系の動特性の測定

Fig. 13 に示すインパルス応答 $g(t)$ を持つ線形系を考える。入出力信号を観測して得られる x, y には、それぞれ、観測のさいの雑音 n_s と、系に加わる外乱と観測雑音の和 n が重畳しており、 n_s, n はともに、ガウス性雑音で入力信号 s と独立ではあるが、 n_s と n とは独立でないとする。

$$x(t) = s(t) + n_s(t) \tag{6.15}$$

$$y(t) = \int_0^\infty g(\lambda) s(t - \lambda) d\lambda + n(t) \tag{6.16}$$

x, y の 3 次相関関数を求めると、(6.15)、(6.16) の関

係を用いてつぎの関係が成立する.

$$\phi_{xxy}(\tau_1, \tau_2) = \int_0^\infty g(\lambda) \phi_{xxx}(\tau_1, \tau_2 - \lambda) d\lambda \quad (6.17)$$

(6.17)の両辺を2次元フーリエ変換した(6.18)の関係より, 系の周波数特性 $G(f)$ が求まる.

$$\Phi_{xxy}(f_1, f_2) = G(f_2) \Phi_{xxx}(f_1, f_2) \quad (6.18)$$

ちなみに出力 y のパイスベクトルは, 入力 x のパイスベクトルを使って(6.19)で表わされる.

$$\Phi_{yyy}(f_1, f_2) = G(f_1)G(f_2)G^*(f_1+f_2)\Phi_{xxx}(f_1, f_2) \quad (6.19)$$

Akaike²⁶⁾, Parzen²⁷⁾ は, mixed spectrum $B_{xxx}(\tau_1, f)$, $B_{xxy}(\tau_1, f)$ を用いて(6.20)の関係より $G(f)$ が求められることを示している.

$$B_{xxy}(\tau_1, f) = G(f)B_{xxx}(\tau_1, f) \quad (6.20)$$

ここで mixed spectrum とは, $z(t) = x(t)x(t+\tau_1)$ を新しく信号と考えて, z と x , および z と y の相互相関関数を作り, それをフーリエ変換したものである. (6.17)によれば, 通常の相関法では除くことのできない雑音 n_s の影響を避けることができるのが特徴で, $G(f)$ を求めるために(6.18)あるいは(6.20)のいずれを用いても本質的な差はない. ただし, 入力信号の3次相関関数が0になるような場合には, 系の特性が求められないことに注意する必要がある.

Akaike は, 同様な手法により, 閉ループ内の系の特性を測定し得ることを示している²⁶⁾.

6.4.2 ある非線形系の特性の測定

入力信号 x がガウス性で, 出力信号 y がつぎのように

表わされるとする.

$$y(t) = \int_{-\infty}^\infty h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha + \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty g(t_1, t_2) \times x(t-t_1)x(t-t_2)dt_1dt_2 \quad (6.21)$$

$g(t_1, t_2)$ は t_1, t_2 について対称とする. クロスパイスベクトル $\Phi_{xxy}(f_1, f_2)$ を求めると,

$$\begin{aligned} \Phi_{xxy}(f_1, f_2) &= \delta(f_2)\Phi_{xx}(f_1) \int_{-\infty}^\infty \Phi_{xx}(f') \\ &\times G(f', -f')df' + 2G(f_1+f_2, -f_1) \\ &\times \Phi_{xx}(f_1)\Phi_{xx}(f_1+f_2) \end{aligned} \quad (6.22)$$

の関係が得られる. これを用いて(6.21)の第2項についての特性が求められる^{28,29)}. なお x, y のクロスパイスベクトル $\Phi_{xy}(f)$ を求めれば,

$$\Phi_{xy}(f) = H(f)\Phi_{xx}(f) \quad (6.23)$$

の関係から(6.21)の第1項の推定ができる.

6.4.3 入出力信号の同時記録をせずに系の特性を測定する方法³⁰⁾

線形系への入力信号が雑音に埋れた周期的な調和複合信号であるとする. 入力の観測信号 $x(t)$ は,

$$x(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cos\{2\pi k f_0(t-t') - \phi_k\} + n_1(t) \quad (6.24)$$

ここで, t' は時間原点, $n_1(t)$ はガウス性雑音とする. 出力 y を時刻 t'' より測定することにすればつぎのように表わせる.

$$y(t) = \sum_{k=1}^n B_k \cos\{2\pi k f_0(t-t'' - t_B) - \psi_k\} + n_2(t) \quad (6.25)$$

$\psi_k - \phi_k$ が系の位相項のうち, 輸送遅れ t_B による項を除いた各周波数成分間の分散であり, B_k/A_k がゲイン特性を表わす. $n_2(t)$ はガウス性雑音であり, $n_1(t)$ と独立の必要はない. 6.2 で述べた方法により, x のパワースペクトル $\Phi_{xx}(f)$ とパイスベクトル $\Phi_{xxx}(f_1, f_2)$ を用いて $\hat{A}_k, \hat{\phi}_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) を求める. y についても同様にして $\Phi_{yy}(f), \Phi_{yyy}(f_1, f_2)$ から $\hat{B}_k, \hat{\psi}_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) が求まる. これらの結果を使って, $\hat{B}_k/\hat{A}_k, \hat{\psi}_k - \hat{\phi}_k$ が求まる. $\hat{\phi}_1 = \hat{\psi}_1 = \pi/2$ としているので, 位相特性は基本周波数の輸送遅れを除いた値となっている.

以上の原理により, 動脈の2点間の特性の推定を試みた³¹⁾. 身体の表面に感圧素子をあてて動脈脈波を各部位について個別に記録する (Fig. 14(a)). 脈波を2カ所で同時に記録しないので, 最良の記録状態を別々に作る事ができ測定が簡単になり, 素子のバラツキも考えなくてよい. Fig. 14(b) に各部位間での位相のずれを表わした. 左右の腕の動脈の特性 C, D は類似し, 細く硬い管 C, D と太く柔かい管 A, B の特性には差異があることなどを見出ししている.

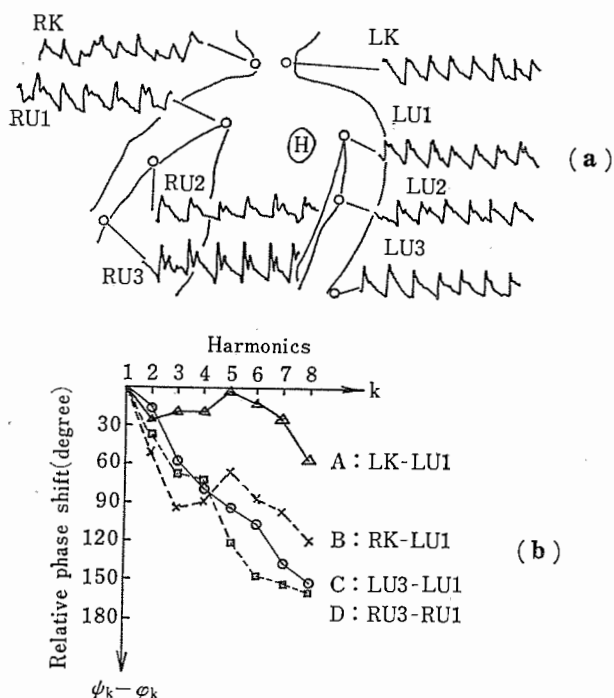


Fig. 14 動脈脈波の伝達関数の測定. (a) 脈波の波形, (b) 2点間の相対的位相特性.

7. あとがき

本報告は、バイスペクトルの定義から推定法および応用例を、時系列信号の解析という観点から考察した。この中で、バイスペクトル測定の物理的意味や推定値の分散の求め方などに新知見を加え、新しい分野への応用例についても述べた。これらのことを通じて、バイスペクトルが信号解析において占める位置と役割を明らかにした。

すでに述べたように、2次相関関数やパワースペクトルによる解析に比べるとバイスペクトルによるそれは、ある制約のもとでしかその機能を発揮し得ず、その意味では限定された役割を果たすことになる。しかし、その機能としては、非ガウス性信号や非線形系の解析、高調波相互間の位相関係の解析など、われわれが波形を観測して感じとるある種の「くせ」を定量的に表現する手段を与えるものであり、その適用は広範囲に及び得るものである。

ただ、パワースペクトルの場合もそうであったように、バイスペクトルもあくまでも信号の一側面を表現しているにすぎず、したがって、バイスペクトル解析に基づいて信号の発生機構などを推定あるいは決定するという問題でも、自ら限界が存在するのである。

そのことを踏まえたくうでバイスペクトル解析を有効に利用するためには、バイスペクトルの意味や性質を明らかにしておく必要があり、本報告でそれらを重視して考察したのはそのためである。

謝辞

日頃御指導いただく千葉大学工学部 磯部 孝教授、ならびに東京大学宇宙航空研究所 石井 泰教授に深く感謝の意を表す。また、有益な助言をいただいた東京農工大学工学部 小畑秀文助教授に謝意を表わす。

文 献

- 1) M. Rosenblatt and J. W. Van Ness: *Ann. Math. Stat.*, **36** (1965) 1120.
- 2) D. R. Brillinger: *ibid.*, **36** (1965) 1351.
- 3) J. W. Van Ness: *ibid.*, **37** (1966) 1257.
- 4) D. R. Brillinger and M. Rosenblatt: *Spectral Analysis of Time Series*, ed. B. Harris (John Wiley, 1967) p. 153.
- 5) D. R. Brillinger and M. Rosenblatt: *ibid.*, p. 189.
- 6) P. J. Huber, B. Kleiner, T. Gasser and G. Dumermuth: *IEEE Trans.*, **AU-19** (1971) 78.
- 7) K. Hasselmann, W. Munk and G. MacDonald: *Time Series Analysis*, ed. M. Rosenblatt (John Wiley, 1963) p. 125.
- 8) 上野: 第12回計測自動制御学会予稿集 (1973) p. 659.
- 9) 上野: 第11回計測自動制御学会予稿集 (1972)

- p. 595.
- 10) S. Fujimura, K. Ohshima and I. Yamada: *Optics Communications*, **4** (1972) 362.
- 11) 桐山, 佐藤, 鈴木, 浜田: 計測自動制御学会論文集, **4** (1968) 295.
- 12) 佐藤, 上田: 計測と制御, **7** (1968) 675.
- 13) たとえば, W. B. Davenport Jr. and W. L. Root: *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise* (McGraw-Hill, New York, 1958) p. 93.
- 14) たとえば, 宮川, 佐藤, 茅: 不規則信号論と動特性推定 (コロナ社, 1969) p. 84.
- 15) 吉村, 石井, 大岡: 測定値の統計的処理 (電気学会, 1968) p. 118.
- 16) 永田: 統計数理研究所シンポジウム記事 (1971) p. 45.
- 17) M. P. Aubry: *Ann. Astrophys.*, **29** (1966) 389; **30** (1967) 101.
- 18) M. D. Godfrey: *Appl. Stat.*, **14** (1965) 48.
- 19) J. A. MacLaubin and J. Raviv: *Information and Control*, **12** (1968) 121.
- 20) 上野, 中島, 作山: 第13回計測自動制御学会予稿集 (1974) p. 443.
- 21) 館: 計測自動制御学会論文集, **9** (1972) 729.
- 22) G. Dumermuth, P. J. Huber, B. Kleiner and T. Gasser: *Electroenceph. clin. neurophysiol.*, **31** (1971) 137.
- 23) 館, 高谷: 医用電子と生体工学, **11** (1973) 284.
- 24) 館, 高谷: 第3回日本脳筋電図学会予稿集 (1973) p. 112.
- 25) 館, 高谷: 第13回日本ME学会予稿集 (1974) p. 290.
- 26) H. Akaike: *Inst. of Statist. Math. Research Memo*, **3** (1966) 269.
- 27) E. Parzen: *Spectral Analysis of Time Series*, ed. B. Harris (John Wiley, 1967) p. 233.
- 28) H. Akaike: *Ann. Inst. Statist. Math.*, **18** (1966) 123.
- 29) L. J. Tick: *Technometrics*, **3** (1961) 563.
- 30) 館, 磯部: 第12回計測自動制御学会予稿集 (1973) p. 657.
- 31) 磯部, 館, 高谷: 第12回日本ME学会予稿集 (1973) p. 287.

付 録 I

確率過程 (x_1, \dots, x_n) の特性関数を $\theta_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ とすると,

$$\theta_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = E[e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)}] \quad (\text{A.1})$$

n 次モーメント $m_n(x_1, \dots, x_n)$ および, n 次キュムラントあるいは半不変量 (semi-invariant) と呼ばれる量 $s_n(x_1, \dots, x_n)$ はつぎのように定義される。

$$m_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(j)^n} \left[\frac{\partial^n}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_n} \times \theta_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \right]_{\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0} \quad (\text{A.2})$$

$$s_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(j)^n} \left[\frac{\partial^n}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_n} \right]$$

$$\times \ln \theta_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Big|_{\alpha_1=\dots=\alpha_n=0} \quad (\text{A.3})$$

このとき、キュムラントとモーメントの間にはつぎのような関係がある。

$$\begin{aligned} s_1(t_1) &= m_1(t_1), \quad s_2(t_1, t_2) = m_2(t_1, t_2) - m_1(t_1)m_1(t_2), \\ s_3(t_1, t_2, t_3) &= m_3(t_1, t_2, t_3) - m_1(t_1)m_2(t_1, t_2) - m_1(t_2) \\ &\quad \times m_2(t_1, t_3) - m_1(t_3)m_2(t_1, t_2) \\ &\quad + 2m_1(t_1)m_1(t_2)m_1(t_3) \end{aligned}$$

$$s_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = \dots \quad (\text{A.4})$$

ただし、 $x_i = x(t_i)$ であるので、変数を t_i にかえていく。とくに、 $m_n(t_1, \dots, t_n)$ の代わりに、平均値まわりのモーメント $m'_n(t_1, \dots, t_n)$

$$\begin{aligned} m'_n(t_1, \dots, t_n) &= E\{ \{x(t_1) - m_1(t_1)\} \{x(t_2) - m_1(t_2)\} \\ &\quad \dots \{x(t_n) - m_1(t_n)\} \} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

を用いると、(A.4)の関係はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} s_1(t_1) &= m_1(t_1), \quad s_2(t_1, t_2) = m_2'(t_1, t_2) \\ s_3(t_1, t_2, t_3) &= m_3'(t_1, t_2, t_3) \\ s_4(t_1, t_2, t_3, t_4) &= m_4'(t_1, t_2, t_3, t_4) - m_2'(t_1, t_2)m_2'(t_3, t_4) \\ &\quad - m_2'(t_1, t_3)m_2'(t_2, t_4) - m_2'(t_1, t_4) \\ &\quad \times m_2'(t_2, t_3) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

一般に、 n 次相関関数は n 次のキュムラントで定義されるが、3次相関関数までを定義するには、キュムラントを用いても、平均値まわりのモーメントを用いても同一の結果を与える。 n 次キュムラント(n 次相関関数)の $(n-1)$ 次元フーリエ変換として n 次スペクトル密度が定義されるのである^{2,4)}。

付 録 II

ガウス性信号 (x_1, x_2, \dots, x_n) の特性関数を、 $\theta_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ とすると、

$$\theta_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \exp\left(j \sum_{k=1}^n m_k \alpha_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sigma_{kl} \alpha_k \alpha_l \right) \quad (\text{A.7})$$

ただし、

$$m_k = E\{x_k\}, \quad \sigma_{kl} = E\{(x_k - m_k)(x_l - m_l)\} \quad (\text{A.8})$$

k 次キュムラントを付録(A.3)により求めれば、ガウス性信号では3次以上のキュムラント(相関関数)は0であることがわかる。したがって、3次相関関数のフーリエ変換であるバイスペクトル密度も0である。