

寄 書

43.20.Bi,Fn; 43.40.At,Dx

テーパ膜上波動の解析に基づく構造ポテンシャルの理論*

奈良高明*¹ 柳田康幸*¹
前田太郎*¹ 館 暲*¹

(1999年3月11日受付)

キーワード テーパ膜, ポテンシャル, 散乱問題, シュレーディンガー方程式, 周波数分解
Tapered membrane, Potential, Scattering problem, Schrödinger equation, Frequency analysis

1. はじめに

本稿では, テーパ膜 (幅が連続的に減少する膜) 上の波動を考える。まず膜幅の変化が十分緩やかならば, テーパ膜上波動の振幅が従う方程式は Schrödinger 方程式と同型となることを示す。その結果, 膜幅という幾何構造からポテンシャルが定義でき, 膜上振動はポテンシャルに対する 1 次元散乱問題として扱えることを示す。また以上の解析から, テーパー膜が周波数分解機能, すなわち, 振動の空間位置が駆動周波数により制御される性質を有することを示す。

2. 理 論

Fig.1 のような幅 $W(x)$ のテーパ膜を考える。膜幅の変化は十分緩やかであるとする。 $y=W(x)$ において膜を固定し, x 軸上の一点で周波数 ω の正弦振動を加える。膜の張力を T , 密度を ρ で表す。

膜上 z 軸方向の変位を u とすれば, u は波動方程式

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \quad (1)$$

に従う。ただし

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

である。このとき両サイド固定の境界条件は

$$u(x, y) = 0, \quad \text{at } y = \pm W(x) \quad (2)$$

である。ここでテーパ導波管の解析を参考に,

$$X = x, \quad Y = \frac{y}{W(x)} \quad (3)$$

なる曲線座標 (X, Y) を導入するとき, 膜幅の変化が十分緩やか ($W'(x) \ll 1$) ならば (X, Y) は直交曲線座標となる¹⁾。そこで (1), (2) を (X, Y) 座標系により

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{1}{W^2(X)} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) u. \quad (4)$$

$$u(X, Y) = 0, \quad \text{at } Y = \pm 1 \quad (5)$$

と書き直せば, 境界条件 (5) が X に依存しなくなるので, (4) を満たす解として, 変数分離型の解

$$u(X, Y) = f(X) \cdot \cos \frac{\pi Y}{2} \cdot e^{-j\omega t} \quad (6)$$

が仮定できる。一般には, Y 依存性は $\cos(n\pi Y/2)$ となるが²⁾, ここでは第一次モード ($n=1$) を考える。

(6) を (4) に代入すれば, $f(X)$ に関する方程式

$$\frac{d^2 f(X)}{dX^2} + \left(\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{2W(X)} \right)^2 \right) f(X) = 0 \quad (7)$$

が得られる。ここで座標系を (X, Y) から (x, y) に戻せば, (1), (2) を満たす解として,

$$u(x, y) = f(x) \cdot \cos \frac{\pi y}{2W(x)} \cdot e^{-j\omega t} \quad (8)$$

ただし

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \left(\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{2W(x)} \right)^2 \right) f(x) = 0 \quad (9)$$

を得る。(9) が, テーパー膜上の振幅分布 $f(x)$ の従う方程式であり, 以下ではテーパ膜方程式と呼ぶことにする。

さてここで, テーパー膜方程式 (9) と, 量子力学における時間を含まない Schrödinger 方程式:

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \phi(x) = 0 \quad (10)$$

との類似性に着目し比較すれば, Schrödinger 方程式における粒子の確率振幅 ϕ , 全エネルギー E , 及びポテンシャル $V(x)$ は, テーパー膜上波動の振幅 $f(x)$, 駆動周波数の自乗に比例する $(\omega/v)^2$, 及び x の関数 $(\pi/2W(x))^2$ に対応させられる。第 2 項に関しては, 正弦強制振動によって入力されるエネルギーが駆動周波数の自乗に比例する, と考えれば妥当である (補遺)。また, 第 3 項の対比から, 両サイドを固定したテーパ膜上の波動に対しては, 膜幅 $W(x)$ のみによって定まるポテンシャルが

$$V_{tm}(x) = \left(\frac{\pi}{2W(x)} \right)^2 \quad (11)$$

という表式で定義できることが示唆される。³⁾ このポテンシャルは波動の通りにくさを表し, その値は膜幅の自乗に逆比例する。つまり, 膜幅が狭いほどポテンシ

* A theory of structural potential by an analysis of elastic waves in a tapered membrane, by Takaaki Nara, Yasuyuki Yanagida, Taro Maeda and Susumu Tachi

*¹ 東京大学大学院工学系研究科
(問合先: 奈良高明 〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1 東京大学工学部計数工学科館研究室)

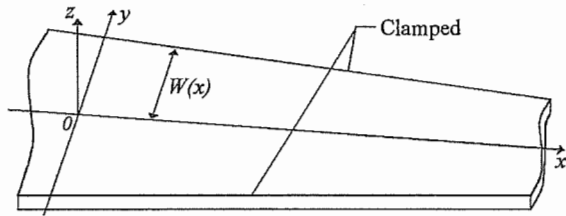


Fig. 1 テーパ膜

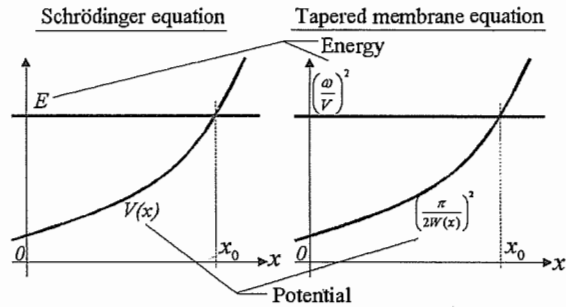


Fig. 2 Schrödinger 方程式とテーパ膜方程式との対比

は高まり、波動は通りにくい。膜幅が徐々に狭まるテーパ膜は単調に増加するポテンシャル場を形成することになる。従来から成されているポテンシャルを有する音響散乱問題の枠組み²⁾の中で、特に両サイドを固定したテーパ膜上波動は、膜幅により定まるポテンシャル(11)に対する散乱問題として扱える、というのが本稿の主張点である。その利点として挙げられるのは、第一に、膜の幾何的構造（膜幅）をポテンシャルに読み換えることで、波動の振る舞いを直感的に理解できるようになること、第二にポテンシャル散乱の問題の解析の結果をすべて弾性波動に導入できること、である。

以上、両サイドを固定した周波数 ω のテーパ膜上波動の問題は、エネルギー $(\omega/v)^2$ を持つ波動のポテンシャル場 $V_{tm}(x)$ に対する 1 次元散乱問題：

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \left(\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - V_{tm}(x) \right) f(x) = 0 \quad (12)$$

と等価となる、とまとめられる (Fig. 2)。

以下では例として膜幅が

$$W(x) = W_0 - dx \quad (13)$$

なるテーパ膜を考える。このときポテンシャルは、

$$V_{tm}(x) = \left(\frac{\pi}{2(W_0 - dx)} \right)^2 \quad (14)$$

となる。 $x < 0$ の一点において入力された波動は、エネルギー $(\omega/v)^2$ がポテンシャル $V_{tm}(x)$ より大きい間は波長を変えながら x 軸正の方向に向かって進行するが、 $(\omega/v)^2 = V_{tm}(x_0)$ となる点：

$$x_0 = \frac{1}{d} \left(W_0 - \frac{\pi v}{2\omega} \right) \quad (15)$$

でポテンシャル障壁に衝突し、一部は反射され、一部は壁にしみだす。 x_0 は転回点と呼ばれる。今、膜幅の変化率 d は十分小さいとして、(12)を x_0 近傍で

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - k_0^2 (x - x_0) f(x) = 0,$$

ただし

$$k_0^2 = \frac{4d\omega^3}{\pi v^3} \quad (16)$$

と変形すれば、転回点近傍の振幅が得られる³⁾。

$$f(x) = A \frac{\pi}{\sqrt{3}} k_0^{1/3} \sqrt{x_0 - x} \left(J_{1/3} \left(\frac{2}{3} k_0 (x_0 - x)^{3/2} \right) + J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} k_0 (x_0 - x)^{3/2} \right) \right) \quad (x < x_0) \quad (17)$$

$$f(x) = A k_0^{1/3} \sqrt{x - x_0} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} k_0 (x - x_0)^{3/2} \right) \quad (x > x_0) \quad (18)$$

ここで A は入力により決まる定数、 J は Bessel 関数、 K は変形 Bessel 関数である。

転回点の位置は、(15)より、波動の周波数 ω によって決まる。すなわち、振動の空間位置は周波数により制御される。この性質は Fig. 2 において、周波数 ω を高めると、エネルギー $(\omega/v)^2$ とポテンシャルとの交点 x_0 が原点から遠ざかることから理解される。生体の聴覚器官で、周波数分解を担う蝸牛内の基底膜は、膜幅が徐々に広がるいわば逆テーパ膜であり、その上下はリンパ液に接しているが、本稿の解析ではテーパ膜単体においても、一種の周波数分解機能が実現されることが示された、とも言える。

3. 実験

Fig. 3 に示す実験系で理論を検証した。 x 軸方向長さ 40 [cm] のゴム膜をテーパ形状の鉄枠で挟みバイスで固定する (図中、撮影用に片側のバイスを外している)。入力端から 10 [cm] の点を原点とし、(13)の定数は $W_0 = 4$ [cm], $d = 0.1$ とする。膜の一端に動電型振動子 (EMIC 511-A) で正弦振動を加え、レーザ変位計 (Keyence LC-2440) により転回点近傍の振幅分布を計測した。膜のもう一端は自由端としている。

Fig. 4 に、周波数を (a) 90, (b) 100, (c) 110 [Hz] と変化させたときの振幅分布を示す。各周波数とも、転回点近傍で、実線で示した理論値 ((17) (18)) と、黒点で示した実測値との一致が得られる。また、転回点が駆動周波数により膜上を移動する様子も分かる。なお、図(c) 原点付近ではポテンシャルの 1 次近似による誤差が見られる。また、以上では、 $W(x) \ll 1$ の下、膜中央付近で張力は一様としたが、 $v = v(x)$ として(12)を解けば一層正確な解が得られると考えられる。

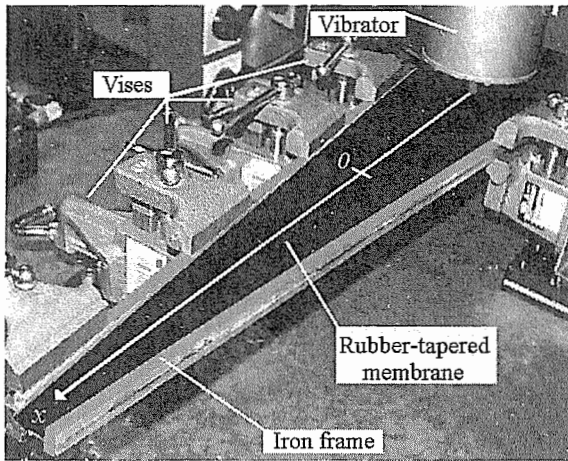


Fig. 3 ゴムテーパ膜上の波動散乱実験

4. 今後の課題

本稿では膜幅の変化が緩やかなテーパ膜上の波動を考察した。今後 $W'(x) \ll 1$ の条件を除いた場合の解析を行う。また、生体の聴覚基底膜の逆テーパ膜としてのモデル化、更にこれを包む蝸牛管のテーパ管としてのモデル化から、蝸牛構造により定まるポテンシャルを導出し、散乱問題としての蝸牛内波動の解析を試みる。

文 献

- 1) 木原太郎, 導波管 (現代工学社, 東京, 1972), pp. 41-47.
- 2) P.D. Lax and R.S. Phillips, "The acoustic equation with an indefinite energy form and the Schrödinger equation," J. Funct. Anal. 1, 37-83 (1967).
- 3) 寺沢寛一, 自然科学者のための数学概論 応用編 (岩波書店, 東京, 1984), pp. 205-235.

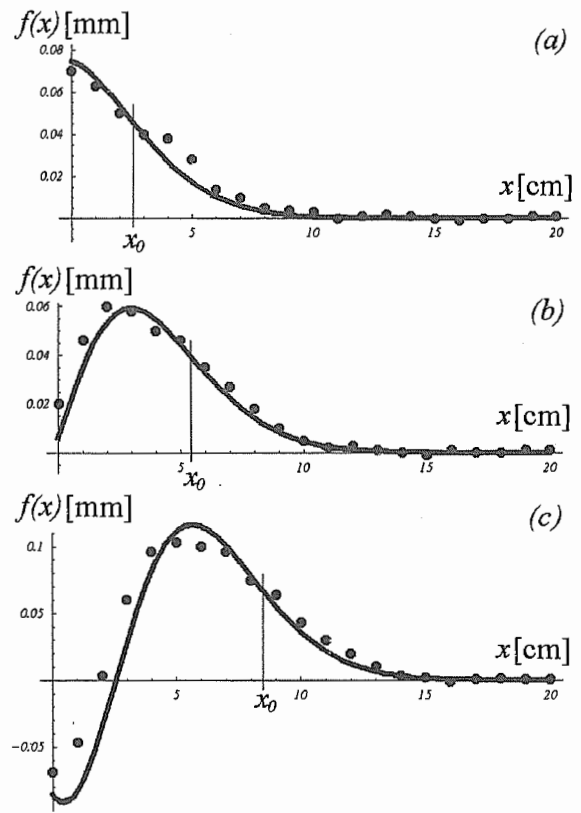


Fig. 4 振幅理論値と実験値との比較

補 遺

膜上の一点に $u_m = A \cos \omega t$ の正弦振動を加えるとき、膜単位面積当たりに加わる入力エネルギーの1周期平均は $\rho A^2 \omega^2 / 4 = (TA^2 / 4) \cdot (\omega / v)^2$ となる。本来はこれを入力エネルギーとすべきだが、本稿では簡単のため、定数倍した $(\omega / v)^2$ をエネルギーとして扱う。ポテンシャルも同様に定数倍して定義する。